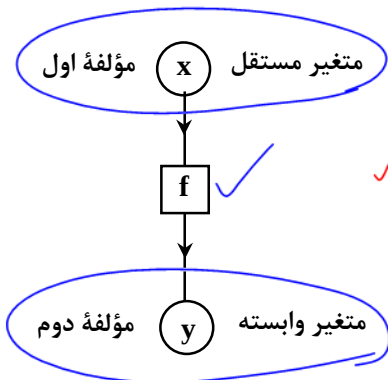


فصل دوم: تابع

تابع:

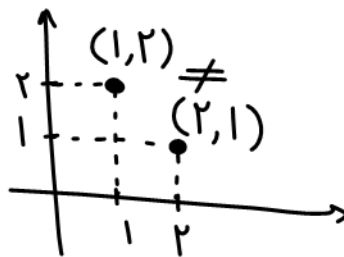
یادآوری: یک رابطه از مجموعه A به مجموعه B را تابع می‌گوییم؛ هرگاه، به هر عضو از مجموعه A، دقیقاً یک عضو از مجموعه B نظیر شود.

$S = \pi \times r^2$
 ✓ تکراری ممنوع
 اما اگر تکراری باشد
 هم باید تکراری باشد



✓ خوب
 برش
 طراحی
 رنگ آمیزی
 میزخوبی
 ۱۰ → ۱۰
 $\pi \times r^2$
 ۳۱۴ → ۵

$$f(1) = 2$$



زوج مرتب: (a, b)
 مؤلفه اول
 مؤلفه دوم

$$f(x) = y$$

✓ $(a, b) \neq (b, a)$

✓ تساوی ۲ زوج مرتب: $(a, b) = (c, d)$
 $b = d$
 $a = c$

۱. با توجه به تابع زیر، جاهای خالی را کامل کنید.

$f = \{(3, \sqrt{5}), (7/5, 2), (8, 3), (2, 3/75)\}$
 $f(1) = 3$

$f(3) = \sqrt{5}$
 $f(7/5) = 2$

$f(\dots) = 3/75$

۲. اگر دو زوج مرتب $(7, 2m+2)$ و $(7, 2m-1)$ دو زوج مرتب از یک تابع باشند، مقدار m را مشخص کنید.

$2m+2 = 2m-1$
 $2m-2m = -1-2$
 $m = -3$

$(7, 2m+2) = (7, 2m-1)$

پایه تشریحی



Abolfazl Bahari

فصل دوم: تابع

۳. اگر رابطه $f = \{(a, 3), (6, a-1), (a-1, b+4), (6, 3), (3, 6)\}$ یک تابع باشد، حاصل $a+b$ را به دست آورید.

$$\begin{aligned} a-1 &= 3 \\ a &= 3+1 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

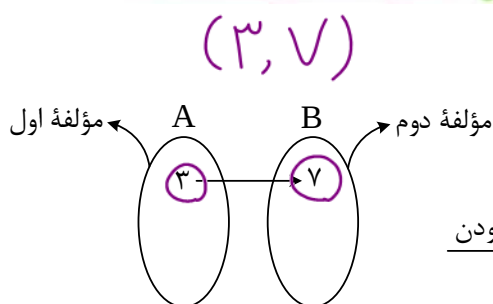
$$4+2=6$$

$$f = \{(4, 3), (6, 3), (3, b+4), (3, 6)\}$$

$$b+4=6 \rightarrow b=2$$

پاسخ تشریحی:

نمودار ون:

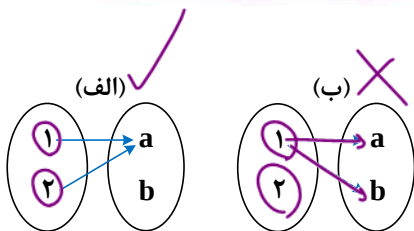


از هر مؤلف اول، فقط
یک بار خارج شود
مؤلف اول بیکار منوع

① شرط تابع بودن
②

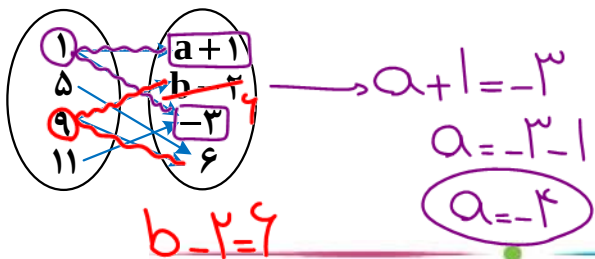
۴. کدام یک از ضابطه‌های زیر که با نمودار پیکانی نمایش داده شده‌اند، تابع نیست؟ چرا؟

پاسخ تشریحی:



۵. مقدار a, b را طوری تعیین کنید که نمودار پیکانی زیر، یک تابع باشد.

پاسخ تشریحی:



$$\begin{aligned} a+1 &= -3 \\ a &= -3-1 \\ a &= -4 \end{aligned}$$

$$b-2=6$$

نمایش هندسی:

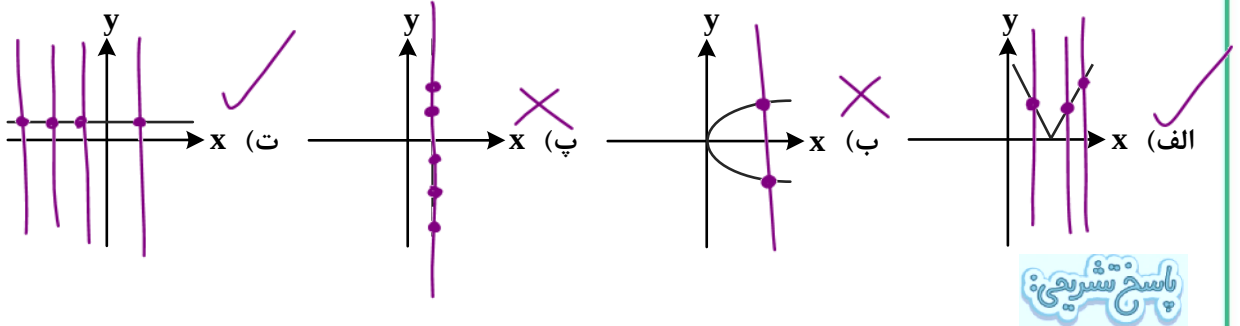
اگر هر خط موازی با محور y رسم شود، حداکثر در آن نقطه
شرط تابع بودن: $\leftarrow$ مقطع شود



Abolfazl Bahari

فصل دوم: تابع

۶. نمودار مختصاتی مربوط به کدام یک از روابط زیر، یک تابع است؟



پاسخ تشریحی:

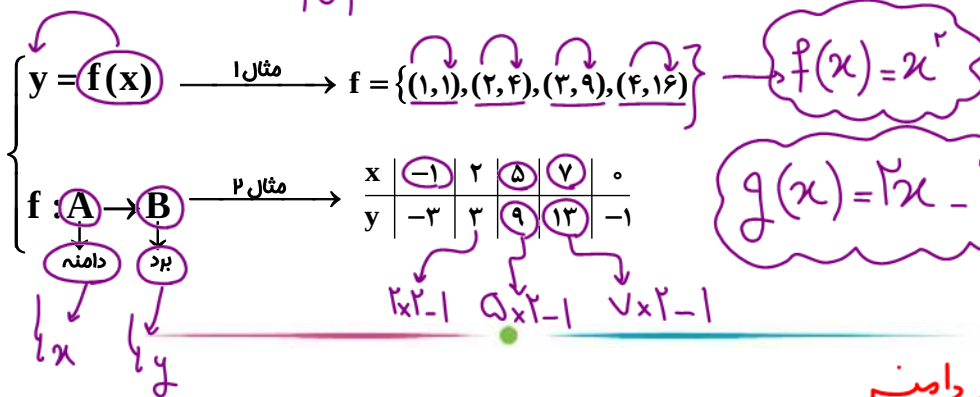
⊗ y داخل قدر مطلق نباشد

$$|y| + x = 1 \quad \times$$

⊗ توان y زوج نباشد

$$y^2 - 5x = 7 \quad \times$$

نمایش ضابطه‌ای:

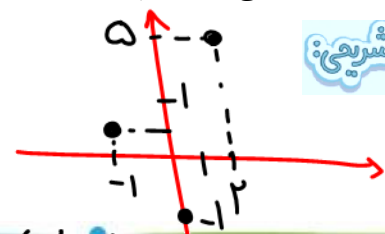


$$g(x) = 2x - 1$$

۷. تابع $f: A \rightarrow B$ با $A = \{-1, 2, 0, 3\}$ تعریف شده است.

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

الف) برد تابع را بنویسید.

ب) نمودار مختصاتی f را رسم کنید.

پاسخ تشریحی:

$$x = -1 \rightarrow \frac{2(-1)+1}{-1-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \rightarrow (-1, \frac{1}{2})$$

$$x = 2 \rightarrow f(2) = \frac{2(2)+1}{2-1} = \frac{5}{1} = 5 \rightarrow (2, 5)$$

$$x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{2(0)+1}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1 \rightarrow (0, -1)$$

$$x = 3 \rightarrow f(3) = \frac{2(3)+1}{3-1} = \frac{7}{2} \rightarrow (3, \frac{7}{2})$$

$$f(x) = y \rightarrow y = x^2 - 1$$

مثال: اگر برد تابع $f(x) = x^2 - 1$ برابر $\{0, -1, 3\}$ باشد، دامنه تابع را به دست آورید.

$$y = 0 \rightarrow 0 = x^2 - 1 \rightarrow 1 = x^2 \rightarrow \pm 1 = x$$

$$y = -1 \rightarrow -1 = x^2 - 1 \rightarrow 0 = x^2 \rightarrow 0 = x$$

$$y = 3 \rightarrow 3 = x^2 - 1 \rightarrow 4 = x^2 \rightarrow \pm 2 = x$$

$$D_f = \{-1, -1, 0, +2, -2\}$$

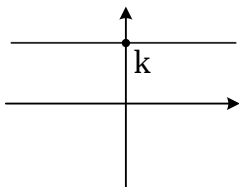


Abolfazl Bahari

فصل دوم: تابع

تابع ثابت: تابعی است که برد آن فقط ۱ عضو دارد.

$$\begin{cases} f(x) = k \\ f: \mathbb{R} \rightarrow \{k\} \end{cases}$$

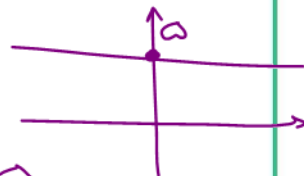


$$f(x) = 5$$

$$f(7) = 5$$

$$f(1000) = 5$$

$$f(-\sqrt{2000}) = 5$$



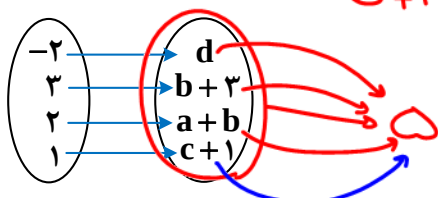
$$d = 5$$

۸. تابع f تابعی ثابت و برد آن، مجموعه تک‌عضوی $\{5\}$ است. مقادیر a, b, c و d را به دست آورید.

$$b + 3 = 5 \rightarrow b = 2$$

$$a + 2 = 5 \rightarrow a = 3$$

$$c + 1 = 5 \rightarrow c = 4$$



پاسخ تشریحی:

۹. اگر تابع $f(x) = (a+2)x^2 + (b-3)x - 5$ یک تابع ثابت باشد، در این صورت حاصل $a+b$ چقدر است؟

$$f(x) = (a+2)x^2 + (b-3)x - 5$$

$$a+2=0 \rightarrow a=-2$$

$$b-3=0 \rightarrow b=3$$

$$a+b = -2+3 = 1$$

پاسخ تشریحی:

۱۰. اگر تابع f ثابت و $f(b) \times f(a+b) = 2f(a) + f(b)$ باشد، به شرط $f(a) > 0$ نمودار تابع f را رسم کنید.

$$k=0$$

$$k > 0$$

$$k \times k = 2k + k$$

$$k^2 = 3k$$

$$k^2 - 3k = 0$$

$$k(k-3) = 0$$

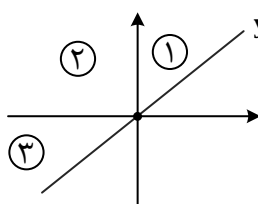
$$k=3$$

پاسخ تشریحی:

$$f(x) = k$$

تابع همانی: تابعی است که دامنه و برد آن، نظیر به نظیر با هم برابرند.

$$\begin{cases} f(x) = x \\ f: D_f = R_f \end{cases}$$



نیمساز ناحیه اول و سوم



Abolfazl Bahari

فصل دوم: تابع

۱۱. در زوج مرتب $(-3, n^2 - 4n)$ مقدار n را طوری به دست آورید که زوج مرتب روی نیمساز ناحیه اول و سوم قرار داشته باشد.

پاسخ تشریحی:

۱۲. اگر $f = \{(5, a+1), (6, c), (2b, 10)\}$ یک تابع همانی باشد، حاصل $\frac{a+c}{b}$ را بیابید.

پاسخ تشریحی:

۱۳. f تابعی ثابت و g تابعی همانی می باشد که $\frac{2g(1) - 3f(2)}{f(a) \cdot g(2) + 1} = 4$ ، حاصل عبارت $f(5) + g(-2)$ را بیابید.

پاسخ تشریحی:

تابع چندضابطه‌ای: تابعی است که بیش از ۱ ضابطه دارد و هر ضابطه، دامنه مختص به خودش را دارد.

$$f(x) = \begin{cases} f_1, x \in D_{f_1} \\ f_2, x \in D_{f_2} \rightarrow D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap \dots = \emptyset \\ \vdots \end{cases}$$

۱۴. مقدار a را طوری تعیین کنید که رابطه دو ضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} x+a, & x \geq 3 \\ 2x-3, & x \leq 3 \end{cases}$ یک تابع باشد.

پاسخ تشریحی:



Abolfazl Bahari

فصل دوم: تابع

۱۵. اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x > 0 \\ x^2+a, & x \leq 0 \end{cases}$ و $f(-1) = 3$ باشند:

الف) مقدار a را به دست آورید.

ب) حاصل $f(0) + 2f(2)$ را به دست آورید.



۱۶. در تابع $f(x) = \begin{cases} x & x < -1 \\ x^2+3 & -1 \leq x \leq 2 \\ 6 & x > 2 \end{cases}$ ، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $f(3)$

ب) $f(\sqrt{2})$

ج) $f(-5)$

رسم تابع چندضابطه‌ای: تابع ثابت ← بدون نقطه کمکی و موازی محور x ها

تابع خطی ← ۲ نقطه کمکی

تابع سهمی ← ۳ نقطه کمکی



Abolfazl Bahari

فصل دوم: تابع

۱۷. نمودار مختصاتی تابع زیر را رسم کنید.

پاسخ تشریحی:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x > 1 \\ x^2, & -1 < x \leq 1 \\ 2x+1, & x \leq -1 \end{cases}$$

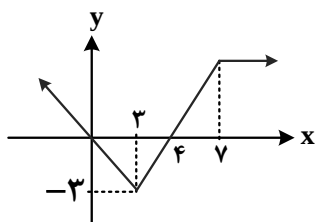
۱۸. نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ -2x & 0 \leq x < 2 \\ x+3 & x \geq 2 \end{cases}$ را رسم کنید. سپس حاصل عبارت $f(1)$ را به دست آورید.

پاسخ تشریحی:

نوشتن ضابطه در تابع چند ضابطه‌ای:

۱۹. با توجه به نمودار تابع f ، حاصل عبارت $f(-1) + f(1)$ را به دست آورید.

پاسخ تشریحی:

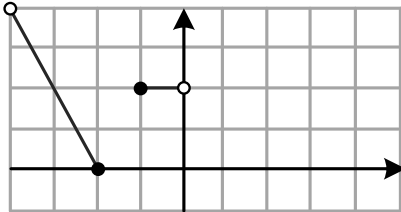




فصل دوم: تابع

۲۰. ضابطه تابع و نمودار آن را کامل کنید.

پاسخ تشریحی:



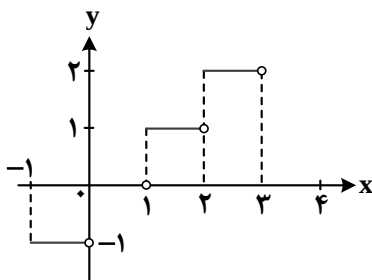
$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x \geq 0 \\ 2 & \dots \\ \dots & -4 < x \leq -2 \end{cases}$$

تابع پلکانی: تابع چندضابطه‌ای است که تمامی ضابطه‌های آن، تابع ثابت می‌باشد.

مثال ۱ $f(x) = \begin{cases} 3 & , x \geq 4 \\ -\sqrt{2} & , 0 < x < 4 \\ 5 & , x \leq 0 \end{cases}$ ☒

مثال ۲ $g(x) = \begin{cases} 3x & , x \geq 4 \\ -\sqrt{2} & , 0 < x < 4 \\ 5 & , x \leq 0 \end{cases}$ ☐

۲۱. با توجه به نمودار زیر، ضابطه زیر را کامل کنید.



$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ \dots & \dots \\ \dots & 1 \leq x < 2 \\ \dots & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

پاسخ تشریحی:



Abolfazl Bahari

فصل دوم: تابع

هزینه	مقدار مصرفی (kwh)
۲۰۰	۰ تا ۱۰۰
۳۰۰	۱۰۰ تا ۲۰۰
۴۰۰	۲۰۰ تا ۳۰۰
۶۰۰	۳۰۰ تا ۴۰۰
۸۰۰	۴۰۰ تا ۵۰۰

۲۲. هزینه برق مصرفی شهری با استفاده از جدول روبه‌رو محاسبه می‌شود.

الف) ضابطه هزینه برق مصرفی را مشخص کنید.

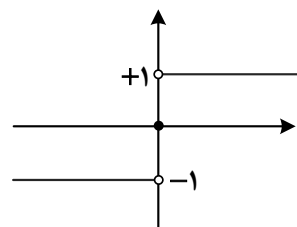
ب) نمودار مختصاتی آن را رسم کنید.

پ) اگر مصرف برق یک خانواده ۲۸۰ کیلووات ساعت باشد، هزینه برق مصرفی این خانواده را مشخص کنید.

پاسخ تشریحی:

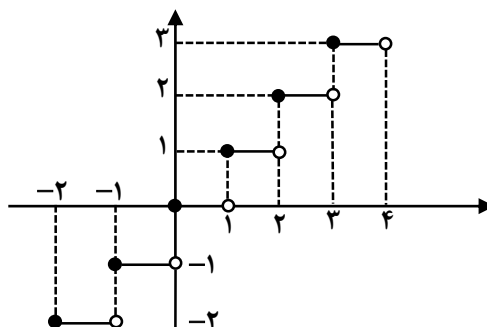
تابع علامت (sign function):

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \quad \xrightarrow{\text{مثال ۱}} \text{sign}(+2\sqrt{3}) = \\ 0, & x = 0 \quad \xrightarrow{\text{مثال ۲}} \text{sign}(-9) = \\ -1, & x < 0 \quad \xrightarrow{\text{مثال ۳}} \text{sign}(8-8) = \end{cases}$$



تابع جزء صحیح:

$$k \leq x < k+1 \rightarrow [x] = k$$





Abolfazl Bahari

فصل دوم: تابع

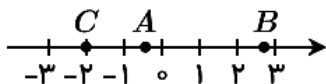
نکاتی که در کتاب درسی داریم:

☑ $0 \leq x - [x] < 1$

دندان اراه‌ای

☑ $[x] + [-x] = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

۱. با توجه به محور زیر، حاصل عبارت $[A] + [B] - 2[C]$ را به دست آورید. ([] ، نماد جزء صحیح است.)



پاسخ تشریحی:

۲. الف) حاصل عبارت $[-0.5] + [\pi + 1]$ را به دست آورید.

ب) اگر $[x] = 2$ باشد، محدوده مقادیر x را به دست آورید.

پاسخ تشریحی:

۳. حاصل عبارت $[1/5] + [-1/5]$ برابر کدام گزینه است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

-۲ (۴)

-۱ (۳)

+۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ تشریحی:



Abolfazl Bahari

فصل دوم: تابع

۴. درستی یا نادرستی هر مورد را مشخص کنید.

الف) اگر $x = 2/2$ و $y = -1/4$ باشد، $[x+y] = [x] + [y]$.

ب) اگر $x = -2/2$ باشد، $[2x] = 2[x]$.

ج) اگر $x = 2$ و $y = 1/5$ باشد، $[xy] = [x][y]$.

د) اگر $x = -1/3$ و $y = -2/8$ باشد، $[x-y] = [x] - [y]$.

پاسخ تشریحی:

۵. اگر $f(x) = a[x]$ و $f(-5/1) = 2$ باشد، در این صورت مقدار a چقدر است؟ ($[]$ ، نماد جزء صحیح است).

پاسخ تشریحی:

۶. اگر $f(x) = \frac{[x]+1}{[x]-1}$ باشد، در این صورت حاصل $f(\pi) - f(\sqrt{5})$ برابر چقدر است؟ ($[]$ ، نماد جزء صحیح است).

پاسخ تشریحی:

۷. نمودار مختصاتی تابع $f(x) = [x-1]$ در دامنه $-1 \leq x \leq 1$ را رسم کنید.

پاسخ تشریحی:



Abolfazl Bahari

فصل دوم: تابع

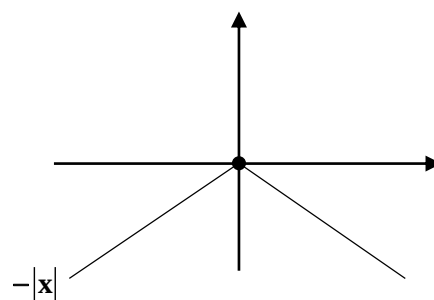
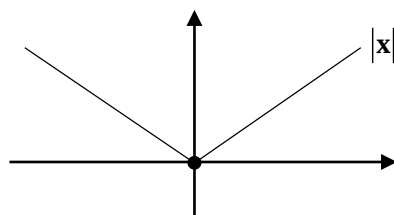
۸. حاصل عبارت $A = \frac{2[x] - 4[-x]}{\sqrt{[x]} + [2x]}$ را به ازای $x = 4/8$ به دست آورید. ([] ، نماد جزء صحیح است.)

پاسخ تشریحی:

تابع قدر مطلق:

فاصله هر عدد حقیقی تا مبدأ مختصات

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$



۹. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $|\sqrt{3} - \sqrt{2}| + |2\sqrt{2} - \sqrt{3}|$

ب) $|2 - \pi| + |4 - \pi|$

پاسخ تشریحی:

۱۰. در تابع $f(x) = a|x-1| + 2[x]$ مقدار a را طوری بیابید که $f(-1) = 3$ باشد.

پاسخ تشریحی:



Abolfazl Bahari

فصل دوم: تابع

۱۱. اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$||-1|-|-3||+|(-1)^n|$$

پاسخ تشریحی:

۱۲. اگر $f(x) = |2-x| - |x-2|$ باشد، در این صورت حاصل $f(\sqrt{5})$ را به دست آورید.

پاسخ تشریحی:

۱۳. اگر تابع $f(x) = |3x-9| + |2x-5|$ را به شکل $f(x) = \begin{cases} ax+b & ; x \geq i \\ cx+d & ; x < i \end{cases}$ بنویسیم، آن گاه مقدار $a+2b-c+2d$ را به دست آورید.

پاسخ تشریحی:

رسم تابع قدرمطلق:

۱. چند ضابطه‌ای کردن تابع قدرمطلق

مثال $f(x) = |x-1| + 2$

مثال $g(x) = |2x+6| - 1$



Abolfazl Bahari

فصل دوم: تابع

۱۴. نمودار تابع $y = \left| -\frac{1}{2}x + 8 \right|$ را رسم کنید.

پاسخ تشریحی:



۱۵. نمودار مختصاتی تابع $f(x) = -|x+1| - 2$ را رسم کنید.

پاسخ تشریحی:



اعمال بر روی توابع:

$$\boxed{\checkmark} (f \pm g)_{(x)} = f(x) \pm g(x)$$

$$D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

$$\boxed{\checkmark} (f \times g)_{(x)} = f(x) \times g(x)$$

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$\boxed{\checkmark} \left(\frac{f}{g}\right)_{(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$



Abolfazl Bahari

فصل دوم: تابع

۱۶. اگر $f = \{(2, 5), (-1, 0), (3, 7)\}$ و $g = \{(2, 2), (3, 6), (0, 1)\}$ باشد:

الف) توابع $f - g$ و $f \times g$ را مشخص کنید.

ب) مقدار $\left(\frac{f}{g}\right)(2)$ را حساب کنید.

پاسخ تشریحی:

۱۷. اگر تابع f به صورت $f = \{(2, 3), (-1, a+1), (1, -2)\}$ ، تابع g به صورت $g = \{(-2, 4), (1, a^2+1), (-1, 2a)\}$ و حاصل $(f - g)(-1) = 2$ باشد، در این صورت مقدار a را به دست آورید.

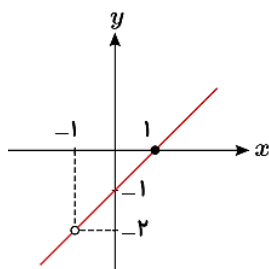
پاسخ تشریحی:

۱۸. اگر ضابطه تابع $f(x) = x^2 - 1$ و ضابطه تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x + 1$ در دامنه قابل تعریف و $g(x) \neq 0$ است، در این صورت ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید.

پاسخ تشریحی:

۱۹. اگر $f(x) = x^2 - 1$ و تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ به صورت نمودار زیر باشد، حاصل $\frac{g(2)}{(f + g)(1)}$ را به دست آورید.

پاسخ تشریحی:



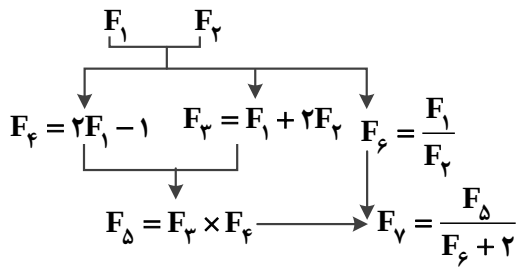


Abolfazl Bahari

فصل دوم: تابع

۲۰. اگر $F_1(x) = 2x + 1$ و $F_2(x) = 3x - 2$ باشد، با توجه به الگوریتم زیر، $F_v(1)$ را محاسبه کنید.

پاسخ تشریحی:



۲۱. اگر $f(x) = -x$ و $g(x) = \text{sign}(x)$ باشند، نمودار تابع $f + g$ را رسم کنید.

پاسخ تشریحی:

۲۲. با توجه به نمودار توابع f و g نمودار تابع $\frac{g}{f}$ را رسم کنید.

پاسخ تشریحی:

